RECTAS Y PLANOS I

Ejercicio nº 1.-

Explica cuál ha de ser el valor de *m* que hace que el tercer plano de la siguiente familia contenga a la recta definida por los dos primeros.
Los planos son:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ mx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$$

Ejercicio nº 2.-

Se consideran las rectas:

$$r:\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases}, \qquad s:\begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

y el plano π, que pasa por los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 2)$ y $C(1, 0, 1)$.

a) Da la ecuación general o implícita de π.

b) Una de las dos rectas corta a π. Determínala.

c) Comprueba que la otra recta es paralela a π.

Ejercicio nº 3.-

Halla la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 3z &= 5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

y es paralelo al plano que contiene a los puntos:

$A(1, 0, -3)$, $B(2, 1, 4)$ y $C(0, 2, 3)$

Ejercicio nº 4.-

Nos dan las rectas r, determinada por los puntos $A(2, -1, 1)$, $B(0, 1, -1)$, y s determinada por $C(2, 0, -1)$ y $D(2, 1, -1)$.

a) Escribe la ecuación general (o implícita) del plano paralelo a r y s que pasa por el origen de coordenadas.

b) Escribe la ecuación general del plano que pasa por B y es perpendicular a r.

Ejercicio nº 5.-

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r:\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x + 3y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

y al punto $P(2, -3, 1)$. Explica el procedimiento.

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s, siendo:

$$r:\begin{cases} y = 2z - 4 \\ x = 3z - 8 \end{cases} \qquad s: \frac{x - 10}{1} = \frac{y - 20}{-1} = \frac{z}{1}$$

SOLUCIONES

Solución nº 1:

Se trata de hallar el valor de m para que el sistema sea compatible indeterminado.

Matricialmente:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{matrix}} \\ 2 & \\ m & 10 \quad 4 \end{pmatrix}}_{A}\ \begin{matrix}2\\3\\11\end{matrix}}_{A'}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, efectivamente los dos primeros planos se cortan a lo largo de una recta.

Para que el 3^er^ plano contenga a dicha recta, ha de ser $ran(A) = ran(A') = 2$.

Para estudiar el rango de A' hallamos el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

Con todo esto podemos afirmar que $ran(A) = ran(A')$. Para que este rango sea 2, bastará con que $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ m & 10 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 20 + m - 3m - 10 - 8 = -2m + 14 = 0 \quad \rightarrow \quad m = 7$$

Conclusión: Para $m = 7$, el sistema es compatible determinado.

Solución nº 2:

a) Obtención del vector normal al plano π:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (2, 1, 2) - (1, 0, 2) = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1) - (1, 0, 2) = (0, 0, -1) \end{matrix}\right\} \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$$

Ecuación del plano:

$$-1(x-1) + 1(y-0) + 0(z-2) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi: x - y + 1 = 0$$

b) Hallamos los vectores de dirección de las rectas:

$$\vec{d}_r = (1, 0, 0) \times (0, 2, 1) = (0, -1, 2) \qquad \vec{d}_s = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$$

¿r corta a π? Veamos si $\vec{d}_r$ es o no paralelo a $\vec{n}$:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n} = (0, -1, 2) \cdot (-1, 1, 0) = -1 \neq 0$$

Por tanto, r corta a π.

c) ¿s corta a π? Veamos si $\vec{d}_s$ es o no paralelo a $\vec{n}$:

$$\vec{d}_s \cdot \vec{n} = (1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 0) = 0$$

Por tanto, s es paralela a π o, acaso, está contenida en π.

Hallamos un punto de s: $z = 0 \rightarrow x = 2,\ y = 2 \rightarrow S(2, 2, 0)$

S no pertenece a π, por tanto, s es paralela a π.

Solución nº 3: El sistema:

$$\left.\begin{matrix} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3z = 5 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\} \text{ tiene como solución el punto: } P(1, 0, -1)$$

Obtenemos el plano que contiene a A, B y C:

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 7) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 6) \end{matrix}\right\} \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-8, -13, 3)$$

El plano buscado tiene como vector normal $\vec{n} = (-8, -13, 3)$ y pasa por $P(1, 0, -1)$, así:

$$-8(x-1) - 13(y-0) + 3(z+1) = 0 \quad \to \quad -8x - 13y + 3z + 11 = 0$$

Solución nº 4:

a) $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-1, 0, 1) = \vec{n}$ es un vector perpendicular al plano buscado.

Ecuación del plano:

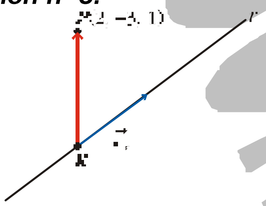
$$-1x + 0y + 1z = 0 \quad \to \quad -x + z = 0$$

b) Un plano perpendicular a r tiene por vector normal $\vec{d}_r = (1, -1, 1)$.

Ecuación del plano buscado:

$$1(x-0) - 1(y-1) + 1(z+1) = 0 \quad \to \quad x - y + z + 2 = 0$$

Solución nº 5:



1º. Hallamos un punto, $R \in r$. Por ejemplo, haciendo $x = 0$ obtenemos:

$R(0, -1, 1)$

2º. Hallamos $\vec{d}_r$, vector dirección de r:

$$\vec{d}_r = (2, -1, 1) \times (1, 3, -1) = (-2, 3, 7)$$

3º. El vector $\overrightarrow{RP} \times \vec{d}_r$ será normal al plano buscado:

$\overrightarrow{RP}(2, -2, 0) \qquad \overrightarrow{RP} \times \vec{d}_r = (2, -2, 0) \times (-2, 3, 7) = (-14, -14, 2)$ Podemos tomar $\vec{n}(7, 7, -1)$.

4º. El plano pasa por $P(2, -3, 1)$ y es perpendicular a $(7, 7, -1)$. Su ecuación será:

$$7(x-2) + 7(y+3) - 1(z-1) = 0 \quad \to \quad 7x - 14 + 7y + 21 - z + 1 = 0$$

$$\to \quad 7x + 7y - z + 8 = 0$$

Solución nº 6:

El vector de dirección de r se obtiene a partir de los vectores normales a los planos que definen la recta r.

$\vec{n}_1 = (0, 1, -2), \ \vec{n}_2 = (1, 0, -3) \qquad \vec{d}_r = (0, 1, -2) \times (1, 0, -3) = (3, 2, 1)$

El vector normal, $\vec{n}$, al plano π buscado es perpendicular a $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Por tanto:

$$\vec{n} = (3, 2, 1) \times (1, -1, 1) = (3, -2, -5)$$

Puesto que π contiene a r, localicemos un punto de π a partir de r:

En r, si $z = 0$, se obtiene $y = -4$, $x = -8$.

Por tanto, $(-8, -4, 0) \in \pi$.

Ecuación de π:

$$3(x+8) - 2(y+4) - 5(z-0) = 0 \quad \to \quad 3x - 2y - 5z + 16 = 0$$